

אלגברה לינארית להנדסת חשמל תשע"ח – תרגול 7

חיתוכים וסכומים של תת מרחבים

תזכורת יהי V מרחב וקטורי, $U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V . הקבוצה

$$U \cap W = \{v \in V | v \in U, \text{ and, } v \in W\}$$

היא חיתוך המרחבים U ו- W .

הגדרה (סכום): יהי V מרחב וקטורי, $U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V . נגדיר את הקבוצה $U + W$ באופן הבא

$$U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}$$

אז $U + W$ הינו תת-מרחב וקטורי של V המכיל את U ו- W .

אם בנוסף מתקיים $U \cap W = \{0\}$, נסמן: $U \oplus W$. זהו סכום ישר.

משפט: יהיו V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$ ו- U תת-מרחב של V . אז

$$1. \dim(U) \leq \dim(V) \text{ נוצר סופית ו-}$$

$$2. \dim(U) = \dim(V) \text{ אם } U = V$$

משפט הממדים: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהיו $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים. אז

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

תרגיל: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ מממד n . יהיו $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים של V כך ש- $\dim(U) = n - 1$ ו- $W \not\subseteq U$.

אז

$$1. V = U + W$$

$$2. \dim(U \cap W) = \dim(W) - 1$$

הוכחה:

1. מההנחה קיים $x \in W \setminus U$. לכן $U \subsetneq U + W \subseteq V$ ולכן

$$n - 1 = \dim(U) < \dim(U + W) \leq \dim(V) = n$$

. לכן אנו מסיקים כי $\dim(U + W) = n$.

2. נשתמש במשפט הממד:

$$n = n - 1 + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U \cap W) = \dim(W) - 1 \text{ ולכן}$$

תרגיל: יהיו $V = \mathbb{R}_2[X]$, $U = \text{Span}(X, X^2 + 1)$ ו- $W = \{P \in V \mid P'(1) = 0\}$. חשבו את $\dim(U + W)$ ו- $\dim(U \cap W)$.

פתרון: אנו יודעים ש- $\dim(V) = 3$ (ראיתם בהרצאה/ תרגילי בית/ בדקו!) וקל לראות ש- $\dim(U) = 2$. כמו כן, נשים לב כי עבור $Q(X) = 1$ מתקיים כי $Q \in W \setminus U$ ולכן $W \not\subseteq U$. מהתרגיל הקודם נובע כי $V = U + W$ ולכן $\dim(U + W) = 3$. כמו כן $\dim(U \cap W) = \dim(W) - 1$ ולכן מספיק שנחשב את $\dim(W)$. מתקיים $P(X) = aX^2 + bX + c \in W$ עבור $a, b, c \in \mathbb{R}$ אם ומתקיים ש $P'(1) = 2a + b = 0$ וזה אמ"מ $b = -2a$. אנו מסיקים כי

$$W = \{aX^2 - 2aX + c \mid a, c \in \mathbb{R}\} = \{a(X^2 - 2X) + c \cdot 1 \mid a, c \in \mathbb{R}\} = \text{Sp}(1, X^2 - 2X)$$

כלומר, $\dim(W) = 2$ ולכן $\dim(U \cap W) = 1$.

תרגיל (אפשר לדלג) יהי V מ"ו, $\dim V = 5$. נניח $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים, $\dim U = 3$, $\dim W = 4$. מהן האפשרויות עבור $\dim(U \cap W)$?

פתרון נשים לב כי מתקיים:

$$U + W \subseteq V, \text{ לכן } \dim(U + W) \leq 5, \text{ ומתקיים גם ש } W \subseteq V + W \text{ ולכן } \dim(U + W) \geq 4.$$

ב. לפי משפט הממד מתקיים כי

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

, כלומר: $\dim(U \cap W) = 7 - \dim(U + W)$.

לכן קיימות שתי אפשרויות: אפשרות אחת היא ש $\dim(U + W) = 5$, ואז $\dim(U \cap W) = 2$ והשניה היא ש $\dim(U + W) = 4$ ואז $\dim(U \cap W) = 3$.

תרגיל: יהיו $U, W \subseteq \mathbb{R}^3$ תת מרחבים של $\mathbb{R}^3$ הנתונים ע"י:

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

חשבו את $U \cap W$.

פתרון יהי $u \in U$ אז קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש $u = \begin{pmatrix} a+b \\ a \\ b \end{pmatrix}$ יהי $w \in W$ אז קיימים $c, d \in \mathbb{R}$ כך ש $w = \begin{pmatrix} c \\ c+d \\ 2c+d \end{pmatrix}$

$v \in U \cap W$ אמי"ם קיימים $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ כך ש $\begin{pmatrix} a+b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c+d \\ 2c+d \end{pmatrix}$ קיבלנו את מערכת המשוואות הבאה:

$$a + b - c = 0$$

$$a - c - d = 0$$

$$b - 2c - d = 0$$

ובכתיב מטריציוני

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow (-1)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow (-\frac{1}{2})R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נציב $d = t$ ונקבל כי $a = -b + c = t - t = 0, b = -t, c = -t$

$$\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c+d \\ 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}$$

לסיכום

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל: נסמן: קבוצת המטריצות הסימטריות: $\text{Sym}(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) | A = A^T\}$
קבוצת המטריצות האנטי סימטריות: $\text{aSym}(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) | A = -A^T\}$
הוכיחו כי $\text{Sym}(\mathbb{F})$, $\text{aSym}(\mathbb{F})$ תת מרחבים של $M_n(\mathbb{F})$, ובנוסף כי לכל $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$, $M_n(\mathbb{F}) = \text{Sym}(\mathbb{F}) \oplus \text{aSym}(\mathbb{F})$.

הוכחה: נראה כי $\text{Sym}(\mathbb{F})$ תת מרחב: ($\text{aSym}(\mathbb{F})$ בבית):

יהיו $\lambda \in \mathbb{F}$, $A, B \in \text{Sym}(\mathbb{F})$.

ראשית, ברור ש $0 \in \text{Sym}(\mathbb{F})$.

נראה סגירות לחיבור: מתקיים $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$ ולכן גם $A+B$ מטריצה סימטרית.

לבסוף, סגירות לכפל בסקלר: לפי כללי השחלוף מתקיים $(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A$ ולכן גם λA מטריצה סימטרית.

כדי להראות שזהו סכום ישר, נראה ראשית שזהו סכום, ואז שהחיתוך הוא אפס.

כדי להראות $M_n(\mathbb{F}) = \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$ נראה הכלה דו כיוונית:

כיוון 1: $M_n(\mathbb{F}) \supseteq \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$. ברור כי $\text{aSym}(\mathbb{F})$, $\text{Sym}(\mathbb{F})$ הם תת מרחבים של $M_n(\mathbb{F})$.

כיוון 2: $M_n(\mathbb{F}) \subseteq \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. מתקיים: $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$. נשים לב ש $\frac{A+A^T}{2}$

היא מטריצה סימטרית כי

$$\left(\frac{A+A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T + (A^T)^T}{2} = \frac{A+A^T}{2}$$

וכן $\frac{A-A^T}{2}$ היא מטריצה אנטי סימטרית כי

$$\left(\frac{A-A^T}{2}\right)^T = \frac{A^T - (A^T)^T}{2} = \frac{A^T - A}{2} = -\frac{A-A^T}{2}$$

מכאן ש- $M_n(\mathbb{F}) \subseteq \text{Sym}(\mathbb{F}) + \text{aSym}(\mathbb{F})$.

כעת נוכיח ש $\text{Sym}(\mathbb{F}) \cap \text{aSym}(\mathbb{F}) = \{0\}$. תהי $A \in \text{Sym}(\mathbb{F}) \cap \text{aSym}(\mathbb{F})$. A סימטרית, ולכן $A = A^T$. מצד

שני, A אנטי סימטרית, ולכן $-A = A^T$. נשווה ונקבל: $A = -A$ ובפרט נקבל ש $a_{ij} = -a_{ij}$ לכל $1 \leq i, j \leq n$.

מכאן: $a_{ij} + a_{ij} = 2a_{ij} = 0$. מכיוון שהנחנו שהשדה שאנו עובדים מעליו אינו $\mathbb{Z}_2$, מתקיים $2 \neq 0$, ולכן כדי לקיים

את המשוואה נצטרך לדרוש $a_{ij} = 0$ לכל i, j . מכאן ש $A = 0$, כנדרש.

מרחבי שורות ועמודות של מטריצות

מרחב השורות של מטריצה

הגדרה תהי $A = \begin{pmatrix} - & v_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & v_m^T & - \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מרחב השורות $\mathcal{R}(A)$ של A הוא התת מרחב של $\mathbb{F}^n$ הנפרש ע"י שורותיה $v_1, \dots, v_m$ דהיינו

$$\mathcal{R}(A) = \text{Span}_{\mathbb{F}} \{v_1, \dots, v_m\}$$

משפט אם המטריצות $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ שקולות שורות, אז $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$. או באופן שקול - פעולות שורה אלמנטריות לא משנות את מרחב השורות של מטריצה.

טענה אם $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת (לאו דווקא קנונית), אז שורותיה שאינן שורות אפסים מהוות בסיס ל $\mathcal{R}(A)$, ובפרט הן קבוצה בת"ל ב- $\mathbb{F}^n$.

הערה נוכל להשתמש במשפט ובטענה הנ"ל כדי למצוא בסיס לתת מרחב נתון של $\mathbb{F}^n$.

תרגיל מצאו בסיס B למרחב $\mathbb{R}^4 \supseteq V = \text{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ מהו הממד שלו?

פתרון נגדיר מטריצה ששורותיה הן הוקטורים הנ"ל, ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת ניקח את השורות שאינן שורות אפסים מהמטריצה שהתקבלה $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$, ומכיוון שמרחב

השורות נשמר במהלך הדירוג, מקבלים

$$V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} B$$

דהיינו B קבוצה פורשת של V . בנוסף, מכיוון שהגענו לצורה מדורגת, B בת"ל. לכן B בסיס של V . הממד $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ הוא כגודל הבסיס, דהיינו 2.

תרגיל המשך השלימו את B שמצאתם לבסיס C של $\mathbb{R}^4$.

פתרון ראשית משיקולי ממד נקבל כי נדרשים עוד 2 וקטורים על מנת לקבל בסיס של $\mathbb{R}^4$. נשתמש שוב בכך שאם מטריצה היא מדורגת, אז שורותיה מהוות קבוצה בת"ל, על נגדיר את המטריצה הבאה:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר דאגנו לקחת את הוקטורים מ B כשורות במטריצה. נשים לב: D מדורגת, על כן שורותיה שאינן שורות אפסים מהוות קבוצה בת"ל. יש בה 4 שורות כאלה ולכן הן מהוות בסיס. כלומר

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הוא בסיס ל $\mathbb{R}^4$ המכיל את B כדרוש.

ובאופן כללי -

הערה הסבר איך משלימים קבוצה בת"ל לבסיס: נניח שברשותינו תת קבוצה $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{F}^n$ בת"ל ואנו רוצים להשלימה לבסיס. נגדיר מטריצה ששורותיה הן איברי S

$$A = \begin{pmatrix} - & v_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & v_k^T & - \end{pmatrix} \in M_{k \times n}(\mathbb{F})$$

נדרג את A עד כדי צורה מדורגת

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} - & u_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & u_k^T & - \end{pmatrix}$$

מכיוון ש- S בת"ל, ב- $\tilde{A}$ אין שורת אפסים. נניח שהעמודות בהן אין איבר פותח ב- $\tilde{A}$ הן $j_1, j_2, \dots, j_{n-k}$. נשים לב

שהמטריצה

$$\begin{pmatrix} - & u_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & u_k^T & - \\ - & e_{j_1}^T & - \\ & \vdots & \\ - & e_{j_{n-k}}^T & - \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$$

שקולת שורות למטריצה מדורגת (על ידי, לפי הצורך, שינוי את סדר שורות) ולא מכילה שורות אפסים, ולכן שורותיה מהוות קבוצה בת"ל ולמעשה בסיס (משיקולי גודל). כעת, נבצע פעולות אלמנטריות הפוכות לאלו שבצענו במהלך הדירוג

ונקבל

$$\begin{pmatrix} - & v_1^T & - \\ & \vdots & \\ - & v_k^T & - \\ - & e_{j_1}^T & - \\ & \vdots & \\ - & e_{j_{n-k}}^T & - \end{pmatrix}$$

פעולות אלמנטריות לא משפיעות על מרחב השורות, לכן $S \cup \{e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-k}}\}$ קבוצה פורשת, ולמעשה בסיס (נשים לב שגם הקבוצה $\{u_1, \dots, u_k, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-k}}\}$ הנה בסיס, אך בסיס זה לא דווקא מכיל את S).

תרגיל נסמן

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

א. הראו ש- S בת"ל מעל $\mathbb{R}$.

ב. השלימו את S לבסיס של $\mathbb{R}^5$ מעל $\mathbb{R}$.

פתרון

א. את הסעיף הזה אנו כבר יודעים לפתור במגוון דרכים. נראה אחת מהן (או שאפשר לדלג), ניקח מטריצה ששורותיה

הן הוקטורים הללו, ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow (-\frac{1}{4})R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

קיבלנו צורה מדורגת ללא שורת אפסים, לכן S בת"ל

ב. נסמן

$$B = S \cup \{e_2, e_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

לפי ההערה הקודמת, B בסיס של $\mathbb{R}^5$.

מרחב העמודות של מטריצה ומשפט הדרגה

הגדרה תהי $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מרחב העמודות $\mathcal{C}(A)$ של A הוא התת מרחב של $\mathbb{F}^n$ הנפרש ע"י עמודותיה $v_1, \dots, v_n$. כלומר

$$\mathcal{C}(A) = \text{Span}_{\mathbb{F}} \{v_1, \dots, v_n\}$$

הערה שימו לב שמרחב העמודות לא נשמר במהלך דירוג. כלומר פעולות שורה אלמנטריות יכולות לשנות את מרחב העמודות של מטריצה.

משפט (משפט הדרגה) לכל מטריצה A מתקיים $\dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A))$.

הגדרה תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ הדרגה של A הנה

$$\text{rank} A = \dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A))$$

הערה $\text{rank } A = \text{מספר האיברים הפותחים בצורה מדורגת} = \text{מספר השורות שאינן אפס בצורה מדורגת}$.

תרגיל חשבו את דרגת המטריצה לכל פרמטר a :

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1+a & 1+a \end{pmatrix}$$

פתרון נחלק למקרים: אם $a = 0$ נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ניתן לראות כי הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס

למרחב העמודות ולכן הדרגה היא 2.

אם $a = 1$ נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, ניתן לראות כי הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס למרחב העמודות

ולכן הדרגה היא 2.

אם $a = -1$ נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ניתן לראות כי הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס

למרחב העמודות ולכן הדרגה היא 2.

כעת נניח כי $a \neq 0, 1, -1$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1+a & 1+a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow \left(\frac{1}{a}\right)R_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1+a & 1+a \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & a - \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1+a - \frac{1}{a} & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow \left(a - \frac{1}{a}\right)^{-1} R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a - \frac{1}{a} & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \left(1+a - \frac{1}{a}\right)R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

ולכן לכל $a \neq 0, 1, -1$ דרגת המטריצה היא 3.