

דו"ח מסכם בניסוי: תנועה הרמונית

חלק: _____

שם הבודק: _____ צפריר אביר

תאריך הבדיקה: 13-01-17

ציון הדו"ח: I 84

II _____

שם מדריך הניסוי (שם מלא): _____ צפריר אביר

תאריך ביצוע הניסוי: 22/12/16

תאריך הגשת הדו"ח: _____

הדו"ח מוגש על ידי:

I	אלון	מוזס	308177815	II	עידו	דבי	204301758
	שם פרטי	משפחה	ת.ז.		שם פרטי	משפחה	ת.ז.

הנדסת חשמל	חמישי בוקר	A	
מסלול הלימוד	מסי קבוצת המעבדה	תת קבוצה	מספר עמדה

הערות הבודק לנושאים לקויים בדו"ח:

דו"ח מעבדה בפיזיקה א' – תנועה הרמונית

מטרת הניסוי:

אימות המודל התאורטי של המטוטלת הפיזיקלית וחישוב רדיוס ההתמד של המטוטלת תוך מציאת



תאוצת הכובד.

רקע תיאורטי:



תנועה הרמונית הינה סוג של תנועה מחזורית, בה הגוף מבצע תנועה החוזרת על עצמה בפרקי זמן קבועים. מתנד הרמוני הינו השם למערכת מכנית בה פועל על גוף כלשהו כוח מחזיר הפרופורציוני להעתק שלו. ניתן לתאר כוח זה באמצעות המשוואה:

$$(1) \quad \vec{F} = -k\vec{x}$$

כאשר F הינו הכוח הפועל על הגוף, k קבוע ו- x הינו היסט הגוף מנקודת שיווי המשקל.

מאפייניה העיקריים של תנועה הרמונית הם:

- **זמן מחזור** – מהווה את הזמן שלוקח לגוף לבצע מחזור תנועה שלם, ולחזור לנקודת המוצא שלו. מסומן באות T .
- **תדירות** – מספר מחזורי התנועה אותם מבצע הגוף בשנייה, מסומן באות f .
- **מהירות זוויתית** – מהווה את קצב שינוי הזווית. מסומנת באות ω .

הקשר בין המושגים מוגדר בצורה הבאה:

$$(2) \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$(3) \quad f = ma = m \frac{dx^2}{dt^2}$$

באמצעות נוסחה (2-3) נגיע ל:

$$(4) \quad \frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

משוואה זאת הינה משוואת התנועה האופיינית לתנועה הרמונית פשוטה.

פתרון המשוואה:

$$(5) \quad x = A \cos(\omega t + \phi)$$

כאשר A היא המשרעת, ו- ϕ הינה זווית המופע ההתחלתית.

מטוטלת פיזיקלית

מטוטלת פיזיקלית הינה גוף קשיח שאינו אלסטי, שתלוי בשדה הכבידה של כדור הארץ ומוסט ממצב שיווי המשקל שלו. כתוצאה מכך מבצע הגוף תנודות כמטוטלת. אם הגוף תלוי במרכז המסה שלו - הוא נמצא בשיווי משקל יציב ולא יתנווד כלל (לחלופין ניתן לראות זאת כתנועה בזמן מחזור אינסופי) וככל שנרחיק את נקודת התליה מנקודת מרכז המסה, ילך ויקטן זמן המחזור. ניתן להסתכל על גוף כאל אוסף מסות קטנות המפוזרות במרחב, ומרכז המסה ניתן לחישוב באמצעות הנוסחה:

$$(6) \quad x_{cm} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$$

כאשר x_{cm} הינו וקטור מרחק המסה מראשית הצירים. ו- r_i הוא מרחק המסה m_i .

מומנט התמד

מסומן ב- I , ומשמעותו הינה היכולת של הגוף למנוע שינוי במהירות זוויתית. מומנט ההתמד מבטא את פיזור המסה של הגוף סביב ציר הסיבוב. המושג מתייחס לגופים שמבצעים תנועה סיבובית סביב עצמם. מחושב באמצעות הנוסחה:

$$(7) \quad I = \sum_i m_i (r_i)^2$$

כאשר m_i מסה i במרחב (המסות מהם מורכב הגוף הקשיח) ו- r_i הינו מרחק מציר הסיבוב של מסה i .

משפט שטיינר

לעיתים לא נדע את מומנט ההתמד I לסיבוב סביב נקודת התלייה של הגוף, אך כן נדע מהו מומנט ההתמד לסיבוב סביב מרכז המסה של הגוף I_0 . במקרים אלו נוכל להיעזר במשפט שטיינר המתייחס למקרים בהם ציר הסיבוב אינו עובר דרך מרכז המסה, אלא בציר מקביל:

$$(8) \quad I = I_0 + ma^2$$

כאשר I - מומנט ההתמד החדש, I_0 מומנט ההתמד סביב הציר העובר במרכז המסה, m מסת הגוף ו- a המרחק בין שני צירי הסיבוב.

בהינתן מומנט התמד סביב ציר העובר דרך מרכז מסה, ניתן לחשב את זמן המחזור T באמצעות הקשר:

$$(9) \quad T^2 = \frac{4\pi^2 I_0}{mgL} + \frac{4\pi^2}{g} L$$

כאשר T הינו זמן מחזור, L - המרחק מנקודת התלייה למרכז המסה של המטוטלת, I_0 - מומנט ההתמד של המטוטלת סביב ציר העובר דרך מרכז המסה, g תאוצת הכובד ו- m - מסת המטוטלת.

רדיוס ההתמד K

הינו מרחק התלייה של הגוף מנקודת המסה שלו, כך שבתלייה במרחק זה זמן המחזור יהיה מינימלי. ככל שנקודת התלייה תהיה רחוקה יותר ממרכז המסה זמן המחזור יגדל, ובמרחק גדול מאוד נוכל להתייחס לגוף כנקודתי. על מנת לחשב את רדיוס התמד, נגזור את נוסחה (9), נשווה לאפס ונקבל כי:

$$(10) \quad k \equiv L_{min} = \sqrt{\frac{I_0}{m}}$$

המטוטלת הפיסיקלית בה השתמשנו בניסוי היא מוט אחיד עליו מורכבת משקולת גלילית אחידה. על מנת לחשב את מומנט ההתמד במרכז המסה של המערכת נעזרנו במשפט שטיינר ובמומנט ההתמד של מוט וגליל אחידים, כך ש:

$$(11) \quad I_0 = I_{\text{מוט}} + I_{\text{משקולת}} = m_1 \left(\frac{r_1^2}{12} + R_1^2 \right) + m_2 \left(\frac{r_2^2}{2} + R_2^2 \right)$$

כאשר:

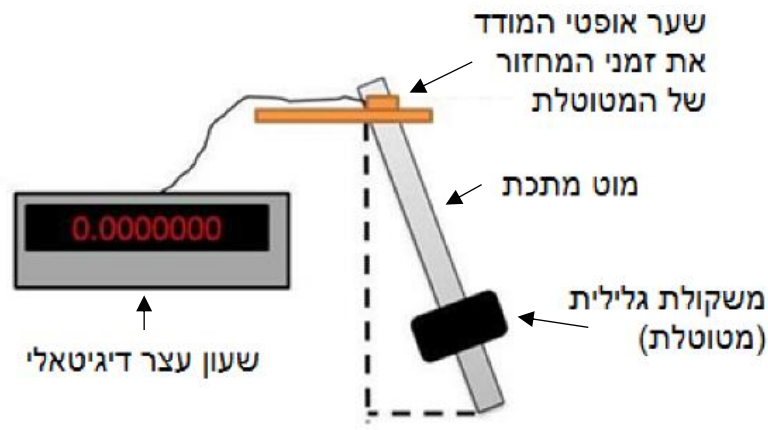
- r_1 - אורך המוט ו- m_1 הינה מסת המוט בהתאמה.
- r_2 - רדיוס המשקולת ו- m_2 הינה מסת המשקולת בהתאמה.
- R_1 - המרחק בין x_{cm} של המוט ל- x_{cm} של המערכת ללא וו התלייה.
- R_2 - המרחק בין x_{cm} של המשקולת ל- x_{cm} של המערכת ללא וו התלייה.

מהלך הניסוי:

בניסוי זה השתמשנו בצידוד כדלקמן:

- מוט מתכת באורך של מטר.

- משקולת מתכת גלילית (מוברגת על המוט).
- וו תלייה למערכת המטוטלת.
- סרגל באורך של 15cm וברזולוציה של 0.1cm.
- מאזני שקילה בדיוק של 0.1gram.
- שער אופטי (תא פוטואלקטרי) המחובר לשעון עצר דיגיטלי ברזולוציה של 0.00001sec.
- מכשיר מכאני לייצוב המערכת ומציאת מרכז המסה.



- איור מס' 1: תרשים המערכת -

בתחילת הניסוי מדדנו את הגדלים הבאים:

- מסת המשקולת.
- מסת המוט.
- מסת וו התלייה והברגים של המטוטלת.
- אורך המוט.
- רדיוס המשקולת.

לאחר מכן חיברנו את המשקולת כעשרים ס"מ מעל קצה המוט. התייחסנו לנקודת מרכז המסה של המוט כנמצאת במרכזו ומדדנו את המרחק בין x_{cm} של המוט ל- x_{cm} של המערכת ללא וו התלייה ואת המרחק בין x_{cm} של המשקולת ל- x_{cm} של המערכת ללא וו.

לבסוף בעזרת המכשיר למציאת מרכז המסה, סימנו את נקודות שיווי המשקל (מרכז המסה) כאשר וו התלייה מוקם בסוף המוט ובמרחק של כ-15 ס"מ ממיקום הסימון הראשון (בהנחה כי מרכז המסה מתפלג אחיד בין שתי מדידות אלה).

לפני תחילת כל מדידה מיקמנו את וו התלייה במרחק שונה על המוט מדדנו את מרחק זה ממרכז המסה – L. בכל מדידה הנחנו את המערכת (מוט, משקולת ו-וו התלייה) על המעמד והסטנו את המוט בזווית קטנה.

את זמן המחזור מדד שעון העצר באופן אוטומטי (באמצעות השער האופטי) בחלוף המוט בשער האופטי. עבור כל מדידה שכזו (L - שונה) מדדנו כעשרה זמני מחזור.

ביצענו 9 מדידות בסה"כ כאשר בין מדידה למדידה שינינו את מיקום וו-התלייה וכך למעשה L ו- x_{cm} השתנו.

תכנון עיבוד תוצאות:

מדידת האורכים בניסוי בוצעה באמצעות סרגל בעל רזולוציה של 0.1cm. שגיאת הסרגל הינה שגיאת התפלגות אחידה (על פי נוסחה 3.3 בחוברת ניתוח נתונים במעבדה א'):



$$\Delta x_{inst} = \frac{0.1}{\sqrt{12}} cm$$

באותו אופן, שגיאת המדידה של המשקל בעל רזולוציה של 0.1gr הינה:

$$\Delta m = \frac{0.1}{\sqrt{12}} gr$$

מדידת זמני המחזור בניסוי בוצעו באמצעות שעון עצר דיגיטלי בעל רזולוציה של 0.00001sec, ולכן בדומה לשגיאת המשקל והסרגל:

$$\Delta t_{inst} = \frac{0.00001}{\sqrt{12}} cm$$

שגיאת זמן המחזור ΔT_{total} חושבה כהרכבה של השגיאה הסטטיסטית (על פי נוסחה 3.10 בחוברת ניתוח נתונים במעבדה א') ומשגיאת המכשיר לפי שונות של התפלגות אחידה:

$$(12) \quad \Delta T_{total} = \sqrt{\Delta T_{stat}^2 + \Delta T_{inst}^2}$$

מכיוון שביצענו התאמה של זמן המחזור בריבוע כפונקציה של אורך המוט L (נוסחה 9) חישבנו את השגיאה T^2 באמצעות הנוסחה לשגיאה עקיפה (נוסחה 4.17 בחוברת ניתוח נתונים במעבדה א'):

$$(13) \quad \Delta T^2 = 2T \times \Delta T \text{ sec}$$

ערכי k_{theo} , I_{0-theo} ו- g_{theo} מתוך המודל התיאורטי:

את הערך התיאורטי של g לקחנו מתוך אתר המעבדה (מבוא – ניסוי נפילה חופשית):

$$g_{theo} = 9.81 \pm 0.10 [\frac{m}{sec^2}]$$

את ערכי k_{theo} ו- I_{0-theo} חישבנו באמצעות נוסחאות (10-11). את שגיאותיהם נחשב באמצעות הנוסחה לשגיאה עקיפה (נוסחה 4.17 בחוברת ניתוח נתונים במעבדה א'):

$$(14) \quad \Delta I_{0-theo} = \sqrt{(\frac{\partial I_0}{\partial R_2} \Delta R_2)^2 + (\frac{\partial I_0}{\partial R_1} \Delta R_1)^2 + (\frac{\partial I_0}{\partial r_2} \Delta r_2)^2 + (\frac{\partial I_0}{\partial r_1} \Delta r_1)^2 + (\frac{\partial I_0}{\partial m_2} \Delta m_2)^2 + (\frac{\partial I_0}{\partial m_1} \Delta m_1)^2}$$



$$(15) \quad \Delta k_{theo} = \sqrt{(\frac{1}{2\sqrt{mI_{0-theo}}} \Delta I_{0-theo})^2 + (\frac{\sqrt{I_{0-theo}}}{2m\sqrt{m}} \Delta m)^2}$$



ערכי $k_{expected}$ ו- $g_{expected}$ מתוך ההתאמה:

ההתאמה שהתקבלה מנוסחה (9) הינה:

$$(16) \quad y = \frac{4\pi^2}{a_1} (\frac{a_2}{x} + x)$$



כאשר $a_2 = k^2$ ו- $a_1 = g$.

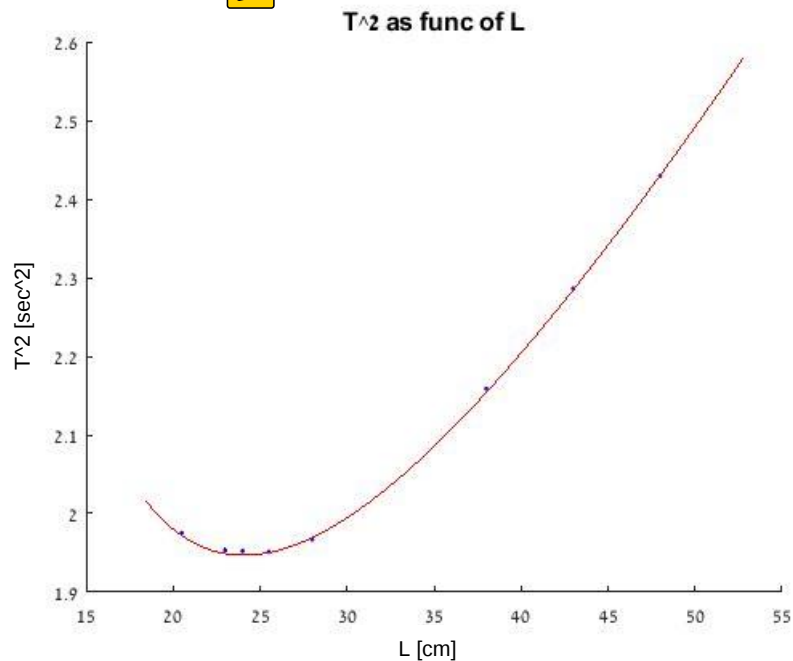
מההתאמה קיבלנו את ערכי a_1 ו- a_2 ומהם נחלץ את ערכי $g_{expected}$ ו- $k_{expected}$. את שגיאות ערכים אלו חישבנו באמצעות הנוסחה לשגיאה עקיפה (נוסחה 4.17 בחוברת ניתוח נתונים במעבדה א'):

$$(17) \quad g_{expected} = a_1 \rightarrow \Delta g_{expected} = \Delta a_1$$

$$(18) \quad k_{expected} = \sqrt{a_2} \rightarrow \Delta k_{expected} = \frac{1}{2\sqrt{a_2}} \Delta a_2$$



עיבוד תוצאות:



- איור מס' 2: גרף התאמה T² כפונקציה של L -

הערכים שהתקבלו מגרף זה:

$$a_1 = 975.66 \pm 0.72 \left[\frac{cm}{sec^2} \right]$$

$$a_2 = 578.81 \pm 0.93 [cm^2]$$

a_1 הינו תאוצת הכובד, ולכן על פי ההתאמה ונוסחה (17):

$$g_{exp} = 9.7566 \pm 0.0072 \left[\frac{m}{sec^2} \right] \rightarrow \frac{\Delta g}{g} = 0.074\%$$

השווינו ערך זה לערך התיאורטי (שנלקח ממבוא לניסוי נפילה חופשית באתר המעבדה) ומצאנו את מדד טיב ההתאמה לתיאוריה:

$$N\sigma(g) = 0.53$$

ניתן לראות כי ערכה של תאוצת הכובד רחוק כחצי סטיית תקן מערכה התיאורטי, דבר התואם את ציפיותינו.

a_2 הינו ריבוע רדיוס ההתמד ולכן על פי ההתאמה ונוסחה (18):

$$k_{exp} = 24.058 \pm 0.019 [cm] \rightarrow \frac{\Delta k}{k} = 0.080\%$$

באמצעות נוסחאות (10) ו- (15) חשבנו את ערכו של רדיוס ההתמד התיאורטי:

$$k_{theo} = 23.102 \pm 0.014 [cm] \rightarrow \frac{\Delta k}{k} = 0.061\%$$

מדד טיב ההתאמה לתיאוריה:

$$N\sigma(k) = 40$$



ניתן לראות כי ערכו של רדיוס ההתמד רחוק ב-40 סטיות תקן מערכו התיאורטי שחושב, דבר שלא תואם את ציפיותינו ולא נמצא בתחום הנדרש של עד 3 סטיות תקן.

ערכי ההתאמה שהתקבלו מגרף זה:

$$\chi^2_{red} = 6.0$$

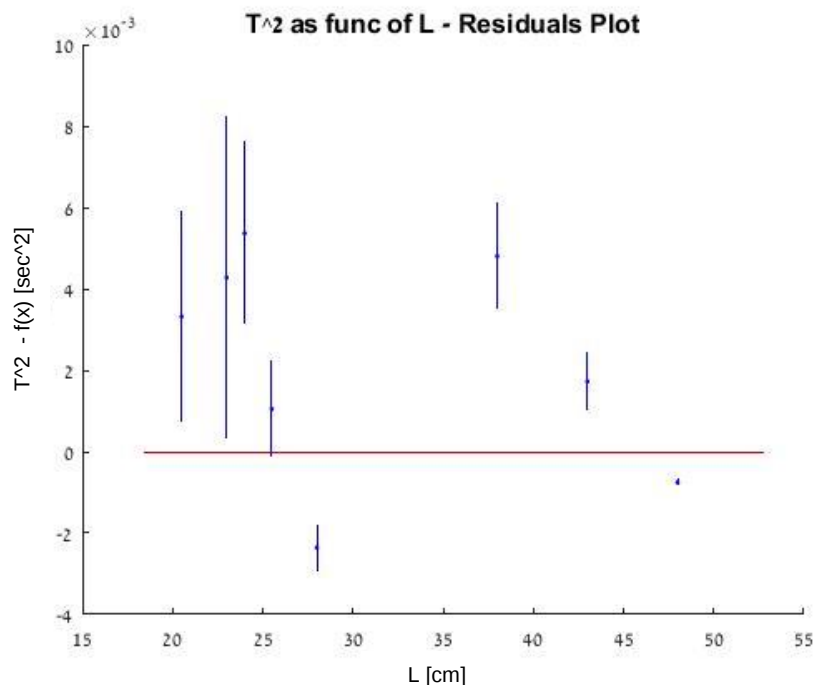
$$P_{value} = 2.8 \times 10^{-6}$$

ערכים אלו אינם תואמים את הערכים שציפינו לקבל. כלומר, חי בריבוע לדרגות חופש שציפינו לקבל על פי הנתונים הינו: $\chi^2_{red} = 1.00 \pm 0.50$, וניתן לראות כי הערך שהתקבל אינו בתחום זה.

בנוסף, ערכו של P_{value} בדרך להיות בין 0.05 ל-0.95, וגם כאן ניתן לראות שלא קיבלנו ערך בתחום זה.

נפרט על כך בחלק הסיכום והמסקנות.

גרף השארים של ההתאמה:



- איור מס' 3: גרף שארים של ההתאמה T^2 כפונקציה של L -

ניתן לראות בגרף שארים זה כי קיים פיזור יחסית אקראי של המדידות ביחס לגרף וללא מגמתיות ברורה כפי שציפינו, אך צלבי השגיאות אינם חותכים את הגרף. דבר זה מתיישב עם סקלת ציר Y וניתן להבין כי הערכת השגיאות קטנה מידי ולכן גם נתוני χ^2_{red} ו- P_{value} אינם בטווח הנדרש.

סיכום ומסקנות:

בניסוי זה רצינו לאמת את המודל התיאורטי של המטוטלת הפיזיקאלית. הערכים אשר רצינו לאמתם היו תאוצת הכובד g ורדיוס ההתמד k .

לשם מימוש מטרת הניסוי וקבלת הערכים המתאימים ערכנו סדרת מדידות, ובעזרתן בנינו התאמה שממנה חילצנו את הערכים המתאימים (בהתאם למפורט בתכנון עיבוד תוצאות).

ניתן לראות שערך טיב ההתאמה לתיאוריה עבור תאוצת הכובד הינו בטווח הנדרש, וקטן מ-3 סטיות תקן.

למרות שערכו של רדיוס ההתמד קרוב יחסית לערך התיאורטי, **ערך טיב ההתאמה לתיאוריה עבורו גדול מהערך הנדרש**. ניתן להסביר זאת בשל סדר גודלן של השגיאות הקטן בהרבה מסדר הגודל של הערכים שנמדדו. סדרי הגודל הקטנים של השגיאות גרמו גם לערכו של χ^2_{red} להיות גדול מהמצופה ובהתאמה לערכו של P_{value} להיות קטן, ולכן אינם בטוחים הנדרשים.

במהלך המדידות הקפדנו על אותה זווית אשר ממנה הטלנו את המטוטלת. בשל הרצון לבצע קירוב מיטבי לזוויות קטנות הטלנו את המטוטלת בזווית קטנה אשר גרמה בחלק מהמדידות, לאחר מספר זמני מחזור קטן מ-10 לאי תגובה של השער האופטי. לכן, נאצלנו במדידות אלו לוותר על הזמן הנדרש למערכת להתייצב ולבצע את המדידות הישר מזמן המחזור הראשון, דבר הגרם לשגיאה נוספת.

שגיאות נוספות בהן הבחנו אך לא היה ביכולתנו לכמת: חיכוך האוויר ומדידה ידנית של מרכז המסה, לכן נאלצנו לא להתחשב בהן בשל אי היכולת לכמת אותן.  בעקבות כך, לדעתנו, הערכת השגיאות שלנו אינה משקפת בצורה מיטבית את השגיאות הקיימות במערכת.

לסיכום, ניתן לומר שהניסוי מאמת בהצלחה את המודל התיאורטי של המטוטלת הפיזיקאלית תוך **התאמה לערכים התיאורטיים של רדיוס ההתמד** ותאוצת הכובד. כמו כן, ניתן לראות כי ההתאמה שבוצעה טובה, ואם היה ניתן להתחשב בשאר השגיאות, ערכי טיב ההתאמה היו קרובים לערכים הנדרשים. 



נספחים:

נספח א' – שאלת מדריך

מנוסחה (9), על בסיסה ביצענו את ההתאמה לגרף, ניתן לראות כי זמן המחזור בריבוע תלוי רק במרחק נקודת התליה של המטוטלת ממרכז המסה שלה. לכן, שינוי במהירות ההתחלתית לא ישפיע על זמן המחזור. בנוסף, מהירות התחלתית גבוהה מדי תגדיל את הזווית הנוצרת בין תנועת המטוטלת לבין הציר האנכי לרצפה. במהלך הניסוי ביצענו קירוב זוויות קטנות, לכן קיום מהירות התחלתית יגרום לקירוב זה להיות לא מדויק.



נספח ב' – טבלת נתונים

נתוני מרכז מסה																				
שגיאת סרגל (ס"מ)			כוכ משקולת למרכז מסה כולל			מוט למרכז מסה כולל			מיקום מ											
15.0			21.1			13.9														
#####																				
מרחק ו תלית																				
l (ס"מ)	את סרגל (ס)	T1(s)	T2(s)	T3(s)	T4(s)	T5(s)	T6(s)	T7(s)	T8(s)	T9(s)	T10(s)	T_avg(s)	inst (s) מנשיר	stat (s) סטטיסטי	שגיאת כוללת	$\Delta T/T$	$T^2 [s^2]$	$2T\Delta T [s^2]$		
80.0	0.028868	1.559	1.559	1.559	1.559	1.559	1.559	1.559	1.559	1.559	1.559	1.559	0.00000289	0.00002571	0.00002587	0.00%	2.4294178783	8.06496E-05		
75.0	0.028868	1.511	1.511	1.512	1.512	1.512	1.512	1.512	1.512	1.514	1.513	1.512	0.00000289	0.00024138	0.00024140	0.02%	2.2863193954	0.000730011		
70.0	0.028868	1.468	1.468	1.468	1.468	1.469	1.469	1.469	1.470	1.471	1.472	1.469	0.00000289	0.00044566	0.00044567	0.03%	2.1587425788	0.001309624		
55.0	0.028868	1.394	1.395	1.395	1.395	1.395	1.396	1.398	1.398	1.400	1.409	1.398	0.00000289	0.00141548	0.00141549	0.10%	1.9532242661	0.003996605		
60.0	0.028868	1.402	1.402	1.402	1.403	1.402	1.403	1.403	1.403	1.403	1.404	1.403	0.00000289	0.00020565	0.00020567	0.01%	1.9670707655	0.00057691		
45.0	0.028868	1.421	1.421	1.422	1.422	1.422	1.423	1.424	1.425	1.427	1.432	1.424	0.00000289	0.00106632	0.00106633	0.07%	2.0273431271	0.003036571		
57.5	0.028868	1.395	1.395	1.396	1.396	1.397	1.397	1.397	1.398	1.398	1.399	1.397	0.00000289	0.00042660	0.00042661	0.03%	1.9513212286	0.001191857		
52.5	0.028868	1.403	1.404	1.404	1.404	1.406	1.407	1.410				1.405	0.00000289	0.00092137	0.00092138	0.07%	1.9752897025	0.002589893		
54.0	0.028868	1.396	1.396	1.396	1.397	1.396	1.396	1.397	1.397	1.397	1.397	1.397	0.00000289	0.00006714	0.00006720	0.00%	1.9504803872	0.000187694		
56.0	0.028868	1.395	1.395	1.396	1.395	1.396	1.397	1.397	1.398	1.400	1.403	1.397	0.00000289	0.00080228	0.00080228	0.06%	1.9523466857	0.002242006		